想定外としてのブラックスワンが金融市場に与える影響の行動経済学的な考察*

尾　崎　祐　介†

概　要

本研究では予測できない事象である想定外を逆ベイズ主義を用いて定式化して，想定外がポートフォリオに与える影響を明らかにする。逆ベイズ主義の性質を使うことで，想定外の影響は想定外だけで分析できることが分かった。その性質を利用して，想定外がポートフォリオに与える影響を明らかにした。また，想定外を比較する枠組みを提案して，それが期待効用，そして，ポートフォリオに与える影響を考察した。

Key Words: 逆ベイズ主義，ポートフォリオ，比較静学

＊本研究に対して，岩城秀樹氏，広田真一氏，福田慎一氏，藤井陽一朗氏，また，ペアリングの協会員委員である大石俊平氏（SMBC日興証券），服部安国氏（大和証券）から有用な助言をいただいたことを，ここに記して感謝する。言うまでもないが，本研究のありうべき誤りは筆者の責任である。

† 早稲田大学商学学術院．メールアドレス：osakiy@waseda.jp

1. はじめに

Taleb（2007）はブラック・スワンを比喩として使って，金融市場で本質的に重要なのは，事前に予測できず，また，それが起きたときの衝撃が非常に大きい事象であることを主張した。2000年以降で振り返ってみても，リーマン・ショック，新型コロナウイルス，そして，ロシアのウクライナ侵攻などブラック・スワンに当てはまる事象を経験して，金融市場におけるその重要性を認識してきた。

ブラック・スワンはどのようにしてファイナンスの分析に取り入れるのだろうか？ブラック・スワンの衝撃が非常に大きい事象という特徴は，レア・ディザスターという形で分析に取り入れられてきた。例えば，Rietz（1998），Barro（2006）などが代表的な文献として挙げられる。一方で，事前に予測できないという特徴は，ファイナンスの従来の分析道具で扱うことが難しく，それを扱った研究を見つけることは難しい。

一方，意思決定論の分野では予測できない事象を取り扱う様々なモデルが提案されている。本研究では，その中でKarni and Vierø（2013）で提案された逆ベイズ主義による定式化を用いて，予測できない事象を明示的に扱った分析を行う。本研究では，一種類のリスク資産と無リスク資産のポートフォリオ問題を扱う。この問題は，共同保険，価格不確実に直面した場合の企業の生産などと数学的に同一の構造を有しているので，ポートフォリオを超えて様々なファイナンス分野への応用に有用な分析になり得る。

本研究では，想定内の状況をベンチマークとして用いる。そして，予測できない事象である想定外を導入して，ベンチマークとの比較によって想定外の影響を明らかにする。逆ベイズ主義の条件により，想定外の影響は想定内の影響を受けずに想定外だけで確かめることができることが分かった。

衝撃が非常に大きいというブラック・スワンの特徴を捉えるため，想定外でのリスク資産の収益は想定する最高の収益よりも高い，あるいは，最低の収益よりも低い，二つの場合に限定した。この設定のもと，想定外がリスク資産に対する投資を増加，あるいは，減少する条件の特徴付けを行った。また，Eeckhoudt and Schlesinger（2006）によって提案された枠組みを想定外に適用することで，想定外を比較する特徴付けを行って，それが期待効用，そして，ポートフォリオに与える影響を明らかにした。

本論文の構成は以下である。第二節で基本的な設定を導入する。特に，逆ベイズ主義を用いてポートフォリオ問題の定式化を行う。第三節で，想定外がポートフォリオ２に与える影響を明らかにする。想定外の影響が想定外だけで考えられることを示した後に，いくつかの場合を取り上げて，想定外とポートフォリオの関係を明らかにする。第四節で，想定外の比較を提案して，それが期待効用，そして，ポートフォリオに対する影響を考える。第五節が結論であり，本研究を簡単にまとめたうえで，課題と応用について述べる。

2. モデル

最初に想定外のない標準的な状況を導入する。本研究では静学的な証券市場を考える。投資家は期待効用に従うと仮定する。（ノイマン・モルゲンシュタイン型）効用関数 $u : X \to \mathbb{R}_+$ は狭義増加, 凹関数とする。効用関数の凹性はリスク回避を意味する。効用関数の微分可能性を仮定する，つまり， $u'(x) = du(x)/dx > 0, u''(x) = d^2u(x)/\ dx^2 \leq 0$ を満たす。本研究では分析に必要な高次微分の存在を仮定する[1)]。1 高次微分については，$u^n(x)$=$d^n u(x)$/=dx^n という表記を用いる。

投資家は初期富として w_0 が与えられている。その富を一種類のリスク資産と無リスク資産に投資する。そして，その投資から得られる期末富で期待効用が決まる。例えば，証券市場で分離定理が成立している状況を考えると，一種類のリスク資産は市場ポートフォリオになる。リスク資産の粗収益率は状態 $s \in S = \{1, 2, \ldots, n\}$ に依存して $R_s = 1 + r_s$，安全資産の収益率は $R_f = 1 + r_f$ と表記する。S を想定内の状態空間と呼ぶ。リスク資産に対する投資金額を α とすると，状態 s の期末富は

$$(w_0 - \alpha)R_f + \alpha R_s \quad = w + \alpha x_s$$

となる。ここで，$w = w_0 R_f$ は初期富の期末価値，$x_s = r_s - r_f$ は超過収益率を表す。この後，超過収益率は単純に収益と呼ぶ。また，リスク資産の投資金額をポートフォリオと呼ぶ。一般性を失うことなく, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ とする。また, $x_1 < 0 < x_S$ とする。状態 s が起こる確率を $\pi(s) > 0$ として, $\sum_{s \in S} \pi(s) = 1$ を満たす。

投資家は以下の期待効用を最大にするようにポートフォリオ α を決める：

$$U(\alpha) = \sum_{s \in S} \pi_s u(w + \alpha x_s)$$

一階条件は

$$U'(\alpha^O) = \sum_{s \in S} \pi_s x_s u'(w + \alpha x_s) = 0$$

で与えられる。リスク回避から二階条件も満たされるので， α^O は最適ポートフォリオとなる。本研究において，想定外を考えない状況での最適ポートフォリオは比較の基準の役割を果たす。つまり， α^O との比較で想定外が最適ポートフォリオに与える影響を考察する。最適ポートフォリオは内点解で一意であることを仮定する，つまり， $0 < \alpha^O < w_O$ とする。また，正のポートフォリオなので，$E[\tilde{x}] > 0$ である。

1）　効用関数の微分可能性に関する条件については，Nakamura（2015, 2016）で議論されている。

次に，想定外を導入する。想定外は状態空間を拡張することで表現することができる。想定外を含む拡張された状態空間を $\hat{S} = S \cup \overline{S}$ とする。ここで，S が想定内，$\overline{S}$ が想定外の状態空間であり，拡張された状態空間はその和集合となる。投資家の期待効用最大化問題は以下となる：

$$V(\alpha) = \sum_{\hat{s} \in \hat{S}} \hat{\pi}_{\hat{s}} \hat{u}(w + \alpha x_{\hat{s}})$$

である。また，最適ポートフォリオは以下を満たす：

$$V'(\alpha^*) = \sum_{\hat{s} \in \hat{S}} \hat{\pi}_{\hat{s}} x_{\hat{s}} \hat{u}'(w + \alpha x_{\hat{s}}) = 0. \tag{1}$$

本研究では，想定外のモデル化は Karni and Vierø（2013）の公理化した効用表現に基づく。彼らの特徴付けに基づくと，以下の二つの条件を満たす：

- $\hat{u}(x_s) = u(x_s)$ for all $s \in S$
- $\frac{\hat{\pi}(t)}{\hat{\pi}(s)} = \frac{\pi(t)}{\pi(s)}$ for all $s, t \in S$

上の条件は，想定内の状態では元々の効用と確率が維持されることを表している。この二つの条件を，逆ベイズ主義の条件と呼ぶことにする。二番目の条件について以下の簡単な例に基づいて理解してみる。

例 1. 想定内の状態空間を $S = \{b, g\}$，拡張された状態空間を $\hat{S} = \{b, g, \overline{s}\} = S \cup \{\overline{s}\}$ とする。想定外がない場合の確率を $\pi(b) = \pi(g) = 1/2$ とする。この場合の尤度比は $\frac{\pi(b)}{\pi(g)} = 1$ となる。二番目の条件によって尤度比は等しくなるので，以下を得る：

$$\frac{\hat{\pi}(b)}{\hat{\pi}g)} = 1 \Leftrightarrow \hat{\pi}(b) = \hat{\pi}(g) = \hat{\pi}.$$

つまり，拡張された状態空間の確率は，$(\hat{\pi}, \hat{\pi}, 1 - \hat{\pi})$ となる。ただし，$\hat{\pi} < 1/2$ である。

3. 想定外とポートフォリオ

目的関数の凹性より，想定外が最適ポートフォリオに与える影響は（1）式に α^O を代入した符号によって明らかにすることができる。

$$V'(\alpha^O) \geq (<) 0 \Leftrightarrow \alpha^* \geq (<) \alpha^O$$

となる。

想定外を含む拡張された状態空間での期待効用を逆ベイズ主義の条件を使うと，以下のように想

定内と想定外に分離できる：

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= \sum_{\hat{s}\in\hat{S}} \hat{\pi}_{\hat{s}}\hat{u}(w+\alpha x_{\hat{s}}) \\ &= \Pi(S)\sum_{s\in S}\frac{\hat{\pi}_s}{\Pi(S)}u(w+\alpha x_s) + \Pi(\overline{S})\sum_{\overline{s}\in\overline{S}}\frac{\hat{\pi}_{\overline{s}}}{\Pi(\overline{S})}\hat{u}(w+\alpha x_{\overline{s}}). \\ &= \Pi(S)\sum_{s\in S}\pi(s)u(w+\alpha x_s) + \Pi(\overline{S})\sum_{\overline{s}\in\overline{S}}p(\overline{s})\hat{u}(w+\alpha x_{\overline{s}}). \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，$\Pi(S)=\sum_{s\in S}\hat{\pi}(s)$，$\Pi(\overline{S})=\sum_{\overline{s}\in\overline{S}}\hat{\pi}(\overline{s})$ である。(2) 式の二行目と三行目の式の第一項が想定内，第二項が想定外の条件付き期待効用に該当する。また，二番目の等式は逆ベイズ主義の一番目の条件，三番目の等式は逆ベイズ主義の二番目の条件を使った。想定外の効用関数についても，想定内の効用関数と同様の仮定を置く。つまり，狭義増加，凹関数を仮定する。

α^O で評価した (1) 式を (2) 式を使って書き換えると

$$\begin{aligned} V'(\alpha^O) &= \Pi(S)\sum_{s\in S}\pi(s)x_s u'(w+\alpha x_s) + \Pi(\overline{S})\sum_{\overline{s}\in\overline{S}}p(\overline{s})x_{\overline{s}}\hat{u}'(w+\alpha x_{\overline{s}}) \\ &= \Pi(\overline{S})\sum_{\overline{s}\in\overline{S}}p(\overline{s})x_{\overline{s}}\hat{u}'(w+\alpha x_{\overline{s}}) \end{aligned} \tag{3}$$

となる。ここで二番目の等号は，想定内の場合での一階条件からである。(3) 式から，

$$W(\alpha)=\sum_{\overline{s}\in\overline{S}}p(\overline{s})\hat{u}(w+\alpha x_{\overline{s}})$$

と表記すると，以下を得る：

$$V'(\alpha^O)=W'(\alpha^O).$$

以上を性質としてまとめておく。

性質 1. 想定外の影響は，想定外の条件付き期待効用の一階条件 $W'(\alpha^O)$ の符号で明らかにすることができる。

想定外の収益率について，$\overline{s}\in\overline{S}$ について $x_{\overline{s}}<x_1$，あるいは，$x_n<x_{\overline{s}}$ を仮定する。つまり，想定外の収益は，想定していた最高の収益よりも高い，あるいは，最低の収益よりも低い収益となる。本研究の動機として，Talab (2007) が提唱したブラック・スワンがある。ブラック・スワンを前提とした場合，これは自然な仮定と言える。また，この仮定を緩和した場合でも分析は可能で

あり，興味のある場合だけに限定して分析を進めるための仮定とも言える。

最初に特別な場合として，想定外の集合が単集合 $\overline{S} = \{\overline{s}\}$ の場合を考えてみよう。この場合，$x_n < x_{\overline{s}}$ と $x_{\overline{s}} < x_1$ の二つの場合が考えられる。前者の場合を $\overline{s} = s_+$，後者の場合を $\overline{s} = s_-$ として，それぞれの収益を x_+，x_- と表記しよう。$\overline{s} = s_+$の場合，

$$W'(\alpha^O) = x_+ \hat{u}'(w + \alpha^O x_+) > 0$$

となる。つまり，$\overline{s} = s_+$の場合，想定外は最適ポートフォリオを増加させることが分かる。もう一つの場合である $\overline{s} = s_-$で$x_- < x_1$については，符号を逆転させるだけで同様の議論が成立する。つまり，$\overline{s} = s_-$の場合，想定外は最適ポートフォリオを減少させることが分かる。上記の議論を命題の形でまとめておく。

命題 1. 想定外の集合を単集合とする，$\overline{S} = \{\overline{s}\}$。収益が $x_+ > x_n$ $(x_- < x_1)$ の場合，想定外は最適ポートフォリオを増加（減少）させる。

次に，想定外の集合を $\overline{S} = \{s_-, s_+\}$とする。それぞれの収益は，$x_- < x_1$ と $x_+ > x_n$である。また，それぞれの条件付き確率を $p = \overline{\pi}(s_-)/\Pi(\overline{S})$ と $1 - p = \overline{\pi}(s_+)/\Pi(\overline{S})$ とする。性質 1 から，想定外の条件付き期待効用によって想定外の影響を確かめることができる。つまり，$\alpha = \alpha^O$ とした時，

$$W'(\alpha^O) = px_- \hat{u}'(w + \alpha^O x_-) + (1 - p)x_+ \hat{u}'(w + \alpha^O x_+)$$

の符号を確かめればよい。命題 1 より，二つの極端な場合は以下が成立する：

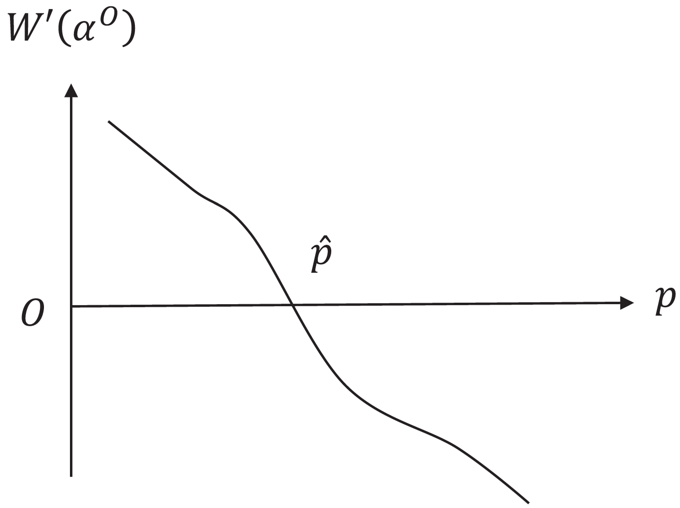
- $p = 0$ のとき、$W'(\alpha^O) > 0$；
- $p = 1$ のとき、$W'(\alpha^O) < 0$。

これに加えて，

$$\frac{\partial W'(\alpha^O)}{\partial p} = x_- \hat{u}'(w + \alpha^O x_-) - x_+ \hat{u}'(w + \alpha^O x_+) < 0$$

から，$W'(\alpha^O)$ が p の減少関数になることが分かる。これらを合わせると，以下の図のようになる：

図１　想定外の確率とポートフォリオ



この図から分かるように $W'(\alpha^O) = 0$ となる $\hat{p}$ が存在する。この確率では，想定外はポートフォリオに影響を与えない。また，$p > (<)\hat{p}$ の場合，$W'(\alpha^O) < (>)0$ となるので，想定外がポートフォリオを減少（増加）させることが分かる。以上を命題の形としてまとめておく。

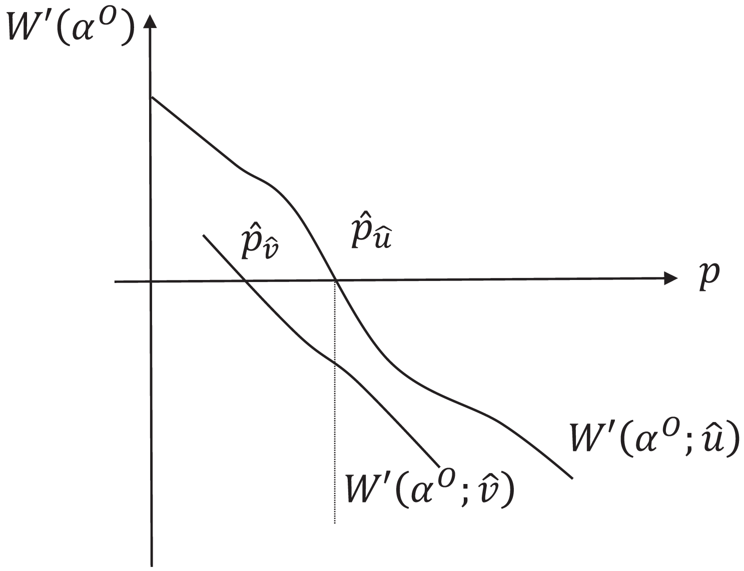
命題 2. 想定外の集合を $\overline{S} = \{\overline{s}_-, \overline{s}_+\}$ とする。収益が $x_- < x_1$ と $x_n < x_+$，その条件付き確率を p と $1-p$ とする。想定外がポートフォリオに影響を与えない条件付き確率 $\hat{p}$ が存在する。そして，条件付き確率が $p > (<)\hat{p}$ を満たす場合，想定外はポートフォリオを減少（増加）させる。

次に，選好が想定外に与える影響を考える。想定外の効用関数として $\hat{v}$ を考えて，$\hat{u}$ よりも Arrow-Pratt の絶対的リスク回避度の意味でよりリスク回避的であるとする。つまり，増加凹関数 k が存在して $\hat{v} = k \circ \hat{u}$ となる。命題 2 の閾値となる条件付き確率を，それぞれ $\hat{p}(\hat{u})$ と $\hat{p}(\hat{v})$ と表記する。この時，比較静学の古典的な結果（例えば，Gollier（2001）の命題などを参照）から，以下を得る：

$$W'(\alpha^O; \hat{u}) = \hat{p}(\hat{u})x_-\hat{u}'(w + \alpha^O x_-) + (1 - \hat{p}(\hat{u}))x_+\hat{u}'(w + \alpha^O x_+) = 0$$
$$\Rightarrow W'(\alpha^O; \hat{v}) = \hat{p}(\hat{u})x_-\hat{v}'(w + \alpha^O x_-) + (1 - \hat{p}(\hat{u}))x_+\hat{v}'(w + \alpha^O x_+) \leq 0.$$

ここで，効用関数の違いを明記するために $W'(\cdot; \hat{u})$ と $W'(\cdot; \hat{v})$ と表記した。図 2 から分かるように，$\hat{p}(\hat{u}) > \hat{p}(\hat{v})$ となることを意味している。これを命題の形としてまとめておく。

図２　リスク回避度とポートフォリオ



命題 3. 想定外の集合を $\overline{S}=\{\overline{s}_-, \overline{s}_+\}$ とする。収益が $x_- < x_1$ と $x_n < x_+$，その条件付き確率を p と $1-p$ とする。想定外がポートフォリオに影響を与えない条件付き確率 $\hat{p}$ とすると，その確率は*Arrow-Pratt* の意味での絶対的リスク回避度に対して減少関数となる。

この命題はよりリスク回避的な場合に，想定外がポートフォリオを減少させる傾向があることを主張している。想定外という新しいリスクに対して，よりリスク回避的な投資家がポートフォリオを減少させる選択をしているという直観的な結果が成立していることを表している。

本節の最後に想定外の集合を一般化した場合について考えてみる。期待収益を μ で表す, つまり,

$$\mu=\sum_{\hat{s}\in\hat{S}}\hat{\pi}(\hat{s})x_{\hat{s}}.$$

ここで，想定内の収益も $\mu=\sum_{s\in S}\pi(s)x_s$ とする。この場合，想定外を含む拡張された状態空間は想定内と比較して，収益が平均保存拡散になっていることが分かる。つまり，Rothschild and Stiglitz の意味でのリスク増加になっている（Rothschild and Stiglitz, 1970）。よって，リスク回避的な投資家にとって想定外は期待効用を減少させることになる。一方，ポートフォリオの影響については,

$$V'(\alpha^O)=\sum_{\hat{s}\in\hat{S}}\hat{\pi}_{\hat{s}}x_{\hat{s}}\hat{u}'(w+\alpha^O x_{\hat{s}})$$

の符号で明らかにできる。ここで，α^O は想定内での最適ポートフォリオだったので，

$$\sum_{s\in S}\pi_s x_s u'(w+\alpha^O x_s)=0$$

を満たす。再びリスクの増加についての性質に着目すると，$xu'(w+\alpha^O x)$ が凹関数の場合，

$$\sum_{\hat{s}\in\hat{S}}\hat{\pi}_{\hat{s}} x_{\hat{s}} \hat{u}'(w+\alpha^O x_{\hat{s}})\leq\sum_{s\in S}\pi_s x_s u'(w+\alpha^O x_s)=0$$

となることが分かる。$xu'(w+\alpha^O x)$ が凹関数となる十分条件としては，

- 相対的リスク回避度が 1 以下で増加，かつ，絶対的リスク回避度が減少；
- 相対的慎重度が正で 2 以下

などが知られている。ここで，絶対的リスク回避度，相対的リスク回避度，そして，絶対的慎重度は，それぞれ

$$-\frac{u''(x)}{u'(x)},\quad -\frac{xu''(x)}{u'(x)},\quad -\frac{u'''(x)}{u'(x)}$$

で定義される。以上を命題の形でまとめる。

命題 4. 想定内の期待収益と想定外を含む期待収益が同じとする。この時，以下のどちらかの条件を満たす場合，想定外はポートフォリオを減少させる。

- 相対的リスク回避度が 1 以下で増加，かつ，絶対的リスク回避度が減少；
- 相対的慎重度が正で 2 以下

4. 想定外の比較

本節では，想定外の比較について考察する。最初に，設定を導入する。二つの想定外 s_- と s_+ を考えて，それぞれの収益は $x_- < x_1$ と $x_n < x_+$ とする。また，それぞれの条件付き確率を 1/2 とする。この二つの想定外を基準想定外と呼ぶことにする。想定外は基準想定外にリスク $\tilde{\epsilon}$ を追加することで表現される。追加リスク $\tilde{\epsilon}$ は一般形で与えているので，この想定外の表現は一般性を失わない。追加リスク $\tilde{\epsilon}$ の実現値は $\epsilon_1<\epsilon_2<\ldots<\epsilon_m$ で与えられる。$x_-+\epsilon_m<x_1$ と $x_n<x_++\epsilon_1$ を満たすとする。

想定外の比較を考えるために，構造を追加する。二種類の追加リスクとして $\tilde{\epsilon}_b$ と $\tilde{\epsilon}_g$ を考える。これらの追加リスクの実現値は同じで，確率だけが異なっているとする。この二種類の追加リスクは期待効用の順番で特徴付けられる。つまり，良い追加リスク $\tilde{\epsilon}_g$ は悪い追加リスク $\tilde{\epsilon}_b$ よりも選好される。二種類の追加リスクは確率支配で表現されて，良い追加リスクと悪い追加リスクの特徴付

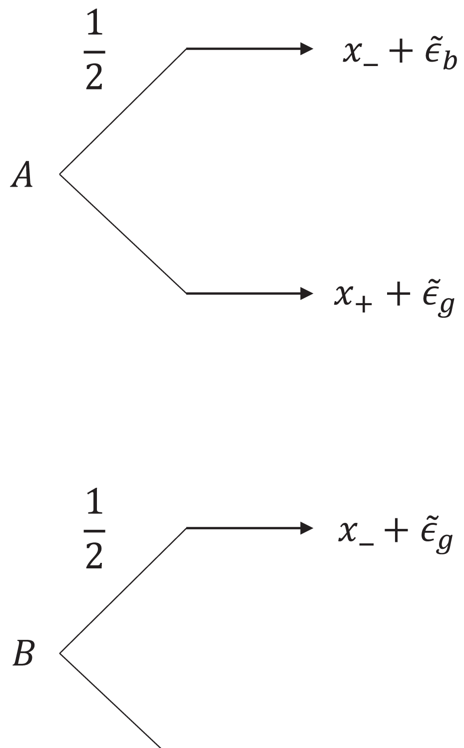
けは効用関数の性質とも関係している。最初に，追加リスクの特徴付けとして第一級確率支配を考える。この場合，選好の単調性を満たしてれば，良い追加リスク $\tilde{\epsilon}_g$ は悪い追加リスク $\tilde{\epsilon}_b$ よりも選好される。

これまでの設定で二つの基準想定外，そして，二つの追加リスクを考えた。ここから基準想定外と追加リスクの組み合わせとして以下の二つを考えてみる。

A_1：x_- に悪い追加リスク，そして，x_+ に良い追加リスク

B_1：x_- に良い追加リスク，そして，x_+ に悪い追加リスク

図 3　二つの想定外



この二つの組み合わせのどちらが好ましいのかを考えてみる。

それぞれの期待効用は以下になる：[2)]

2)　表記の簡単化のため，想定外の効用関数を $\hat{u}$ ではなく，u と表記する。

$$U(A_1)=\frac{1}{2}E[u(w+x_{+}+\tilde{\epsilon}_g)]+\frac{1}{2}E[u(w+x_{-}+\tilde{\epsilon}_b)]$$
$$U(B_1)=\frac{1}{2}E[u(w+x_{+}+\tilde{\epsilon}_b)]+\frac{1}{2}E[u(w+x_{-}+\tilde{\epsilon}_g)].$$

ここで，組み合わせ B_1 が A_1 よりも好ましくなる条件を考えてみる。つまり，

$$U(B_1)\geq U(A_1)$$
$$\Leftrightarrow E[u(w+x_{-}+\tilde{\epsilon}_g)]-E[u(w+x_{+}+\tilde{\epsilon}_g)]\geq E[u(w+x_{-}+\tilde{\epsilon}_b)]-E[u(w+x_{+}+\tilde{\epsilon}_b)] \tag{4}$$

が成立する条件を考える。第一級確率支配の性質から，(4)式は $u(w+x_{-}+\epsilon)-u(w+x_{+}+\epsilon)$ が増加関数の場合，つまり，

$$u'(w+x_{-}+\epsilon)\geq u'(w+x_{+}+\epsilon) \tag{5}$$

の場合に成立する。$x_{-}<x_{+}$ から，(5) 式は u' が減少関数，つまり $u''\leq 0$ の場合に成立することが分かる。上記を命題の形でまとめておく。

命題 5.　想定外として A_1 と B_1 を考える。リスク回避的な投資家は，想定外 B_1 を A_1 よりも好む。

Eeckhoudt and Schlesinger (2006) が提案した良いと悪いの組み合わせの構造を持っていることに注意する必要がある。良い基準想定外と悪い追加リスク，また，悪い基準想定外と良い追加リスクの組み合わせは，良い基準想定外と良い追加リスク，また，悪い基準想定外と悪い追加リスクの組み合わせよりも好むことになる。第一級確率支配が追加リスクの順序付けとして使われたので，選好に対する条件がリスク回避になっている。

次に，ポートフォリオの影響を考える。最適ポートフォリオは以下で与えられる：

$$U'(\alpha^*)=\frac{1}{2}E[(x_{-}+\tilde{\epsilon}_i)u'(w+\alpha^*(x_{-}+\tilde{\epsilon}_i))]+\frac{1}{2}E[(x_{+}+\tilde{\epsilon}_j)u'(w+\alpha^*(x_{+}+\tilde{\epsilon}_j))]=0.$$

ここで，$\tilde{\epsilon}_i=\tilde{\epsilon}_b$ と $\tilde{\epsilon}_j=\tilde{\epsilon}_g$ と設定した場合が，想定外 A_1 に対応し $\tilde{\epsilon}_i=\tilde{\epsilon}_g$ と $\tilde{\epsilon}_j=\tilde{\epsilon}_b$ と設定した場合が，想定外 B_1 に対応する。ここで，想定外 A_1 の場合の最適ポートフォリオを α_A，そして，想定外 B_1 の場合の最適ポートフォリオを α_B と表記して，一般性を失うことなく，α_A=1 にする。目的関数の凹性より，想定外 B_1 でポートフォリオを増加させる条件は

$$U'(\alpha_1=1;A_1)=\frac{1}{2}E[(x_{-}+\tilde{\epsilon}_b)u'(w+x_{-}+\tilde{\epsilon}_b)]+\frac{1}{2}E[(x_{+}+\tilde{\epsilon}_g)u'(w+x_{+}+\tilde{\epsilon}_g)]=0$$
$$\Rightarrow U'(\alpha_1=1;B_1)=\frac{1}{2}E[(x_{-}+\tilde{\epsilon}_g)u'(w+x_{-}+\tilde{\epsilon}_g)]+\frac{1}{2}E[(x_{+}+\tilde{\epsilon}_b)u'(w+x_{+}+\tilde{\epsilon}_b)]\geq 0 \tag{6}$$

となる。(6) 式から，求めたい条件は

$$\begin{aligned}&E[(x_-+\tilde{\epsilon}_g)u'(w+x_-+\tilde{\epsilon}_g)]-E[(x_++\tilde{\epsilon}_g)u'(w+x_++\tilde{\epsilon}_g)]\\&\Rightarrow E[(x_-+\tilde{\epsilon}_g)u'(w+x_-+\tilde{\epsilon}_b)]-E[(x_++\tilde{\epsilon}_g)u'(w+x_++\tilde{\epsilon}_b)]\end{aligned} \tag{7}$$

を満たすことになる。第一級確率支配の性質から，（7）式を満たす条件は

$$u'(w+x_-+\epsilon)+(x_-+\epsilon)u''(w+x_-+\epsilon)\geq u'(w+x_++\epsilon)+(x_++\epsilon)u''(w+x_++\epsilon) \tag{8}$$

となる。（8）の第一項目に関しては，リスク回避から

$$u'(w+x_-+\epsilon)\geq u'(w+x_++\epsilon)$$

が成り立つ。第二項目に関しては，$x_-+\epsilon<x_1<0<x_n<x_++\epsilon$ が成立することに注意すると，リスク回避から

$$(x_-+\epsilon)u''(w+x_-+\epsilon)>0>(x_++\epsilon)u''(w+x_-+\epsilon)$$

が成り立つ。つまり，リスク回避から（8）が成立する，つまり，想定外 B_1 の場合に A_1 と比較してポートフォリオを増加させることが分かった。

上記を命題の形でまとめておく。

命題 6. 想定外として A_1 と B_1 を考える。リスク回避的な投資家は，想定外 B_1 の場合に A_1 と比較してポートフォリオを増やす。

この命題は望ましい想定外に対して，ポートフォリオを増やすという直観と整合的な結果が成立することを表している。一方，ポートフォリオ理論では第一級確率は明確な比較静学を出すためには弱い確率支配であることが知られているので，その観点からは意外な結果である。この結果が得られたのは，想定外が極端な値を取るという特徴に依拠している。

この結果は追加リスクがリスク増加の場合に，条件をリスク回避から慎重に変えることで拡張できる。ここで，投資家が慎重とは，$u'''\geq 0$ であることを言う。第一級確率支配の場合と同様の議論を適用できるので，以下に結果だけを命題の形でまとめておく。

命題 7. 想定外として A_2 と B_2 を考える。慎重な投資家は，想定外 B_2 を A_2 よりも好む。

命題 8. 想定外として A_2 と B_2 を考える。慎重な投資家は，想定外 B_2 の場合に A_2 と比較してポートフォリオを増やす。

同様の議論を繰り返すことで，上記の結果は，一般に N 次の確率支配に対しても成立すると考えられる。

5. 結　論

本研究では，Karni and Vierø（2013）の逆ベイズ主義を用いて，想定外を取り込んだポートフォリオの分析を行った。想定外の影響は，想定内の影響を受けずに想定外だけで明らかにできることが分かった。その性質を利用して，想定外がポートフォリオに与える影響を明らかにした。また，Eeckhoudt and Schlesinger（2006）の枠組みを適用して想定外の比較を行うことを提案して，それが期待効用，そして，ポートフォリオに与える影響を明らかにした。

本研究の二つの課題について述べる。一つ目の課題は，本研究の前提に対する実証的な点である。本研究の分析は，Karni and Virø（2013）の定式化に依拠している。特に，想定外を導入しても，想定内の確率と効用が影響を受けないという性質に依拠している。そのため，本分析を正当化するためには，彼らの定式化を実証的に検証する必要がある。実際のところ，想定外が想定内に与える影響は状況によって異なると予想されるので，どのような状況で適応できるのかを慎重に検討する必要がある。

二つ目の課題として，本研究で分析しているのは想定外の事後的な影響なので，想定外を取り入れた分析になっているかという点である。言い換えれば，事前的に想定外の与える影響は明らかにしていない。ただ，投資家にとって想定外であれば，それがポートフォリオの選択などに影響を及ぼさないはずであり，その事前的な影響を分析するのは概念的な難しさが伴う。

最後に，本研究の応用について述べる。例えば，投資信託などの問題を考えると，ファンドマネージャーと顧客の考えている想定というのは異なっている可能性がある。本研究の枠組みを適用すれば，ファンドマネージャーは想定外を含めた拡張された状態空間，そして，顧客は想定内の状態空間という定式化が考えられるかもしれない。将来的には，本研究を出発点として，上で挙げた例のような様々な状況に応用されることを期待したい。

参考文献

［1］Barro, R. J.（2006）. Rare disasters and asset markets in the twentieth century. *Quarterly Journal of Economics 121*（3），823-866.

［2］Eeckhoudt, L., and Schlesinger, H.（2006）. Putting risk in its proper place. *American Economic Review 96*（1），280-289.

［3］Gollier, C.（2001）. The economics of risk and time, MIT press, Cambridge, MA.

［4］Karni, E., and Vierø, M. L.（2013）. “Reverse Bayesianism”: A choice-based theory of growing awareness. *American Economic Review 103*（7），2790-2810.

［5］Nakamura, Y.（2015）. Differentiability of von NeumannMorgenstern utility functions. *Journal of Mathematical Economics 60*, 74-80.

［6］Nakamura, Y.（2016）. Higher-order attitudes toward risk: Behavioral characterizations of differentiability. SSRN 2807254.

［7］Rietz, T. A.（1988）. The equity risk premium a solution. *Journal of Monetary Economics 22*（1），117-131.

［8］Rothschild, M., and Stiglitz, J. E.（1970）. Increasing risk: I. A de nition. *Journal of Economics Theory 2*(3), 225-243.
［9］Taleb, N. N.（2007）The black swan, Random House, NY.（望月衛訳『ブラック・スワン』（上・下）ダイアモンド社 , 2008 年）