機関投資家と資産価格バブル

慶應義塾大学経済学部
佐　藤　祐　己

1　はじめに

ファンドマネジャーの運用成績に連動したインセンティブ制度（報酬体系や解雇ルール）は，彼らの取引戦略をどう変化させ，資産価格バブルにどのような影響を与えるのだろうか？　とくに，インセンティブ制度を構成する「アメ」の要素（報酬）と「ムチ」の要素（解雇の脅威）の影響は，どう異なるのだろうか？　近年，金融市場における機関投資家の存在感が高まる中，こうした問いに答える必要性が叫ばれてきた[1)]。それにもかかわらず，機関投資家とバブルの関係を論じた理論研究はほとんど存在していない。

本稿は，ファンドマネジャーのインセンティブ構造とバブルとの相互作用を理論的に分析する。モデルの基本構造は，Abreu and Brunnermeier（2003）（以下 AB）に従う。連続時間・無限期間の経済で，1 種類の金融資産が取引される市場を想定する。多数のファンドマネジャーが，初期にその資産を保有している。ある確率的な時点に，バブルが外生的に発生する（つまり，資産価格がファンダメンタルを超えて成長し始める）。マネジャーたちはバブルの存在に順々に気付いていく。バブルに気付いたことは各自の私的情報のため，自分が他のマネジャーたちよりも早く気付いたのか遅れて気付いたのかは分からない。バブルに気付いたマネジャーは，資産を売るタイミングを選択する。バブルは，マネジャーたちのある一定割合が売却した瞬間に崩壊する（つまり，価格がファンダメンタルに戻る）と仮定する。マネジャーたちは互いの売却行動を観察できないため，崩壊のタイミングを完全に予見することはできない。そのため，バブルにしばらく“乗る”（売却を遅らせる）ことで，価格上昇の恩恵を受けられる可能性がある一方で，売り遅れて崩壊に巻き込まれる可能性も高まることになる。

本稿の設定と AB の最大の違いは，マネジャーの利得構造である。AB におけるマネジャーは，あたかも個人投資家のように，彼自身の投資リターンのみに関心がある。しかし本稿のマネジャーの利得は，現実の機関投資家の多くがそうであるように，市場ベンチマークとの比較に基づく以下のような“アメ”の要素と“ムチ”の要素の両輪で構成される。

---

1)　12005 年の Review of Financial Studies コンファレンス “The Causes and Consequences of Recent Financial Market Bubbles” は，今後望まれる研究の方向性について，“A promising line of research [⋯] is to focus on agency costs in general, and monetary incentives in particular, to find out whether these magnify or dampen bubbles.” と総括している。

1. インセンティブ報酬（アメ）：各マネジャーは，各時点において，彼自身の運用リターンと市場ベンチマークのリターンとの相対評価によって報酬を受け取る。これは，ベンチマークと比べて良いリターンを出し続ける限り，継続的に受け取ることができる。
2. 解雇（ムチ）：市場ベンチマークを下回るリターンを一定期間以上出し続けると，解雇され，それ以降は報酬を受け取れなくなる。

各マネジャーは，この利得構造を所与として，バブルに乗る時間の長さを選択する。彼らが長くバブルに乗るほど崩壊は先延ばしになるため，バブルの持続期間も内生的に決まる。つまり，各マネジャーは市場ベンチマークを所与として意思決定するが，そのベンチマーク自体も多くのマネジャーたちの行動の結果として内生的に決まるのである。本稿の主目的は，マネジャーのインセンティブ構造におけるアメ（報酬）とムチ（解雇の脅威）のそれぞれが，彼らの取引戦略やバブルの持続にどう影響するかを理解することである。

モデルの対称均衡において，各マネジャーは非負かつ有限の期間ずつバブルに乗る。その理由はABとは根本的に異なる。本モデルでは，ABとは違い，「資産を永久に売らない」という戦略をとってバブル崩壊時に大きな含み損を出すことは，個々のマネジャーにとっては必ずしも悪いことではない。なぜなら，崩壊時には市場ベンチマークも同様に下落しているので，市場との相対評価によって決まる報酬には影響がないからである。しかし，そのような戦略はベンチマークを上回れず，高い報酬には繋がらないため，最適にはなりえない。ベンチマークを上回るには，ある程度の“逆張り”をする必要がある。つまり，バブルの拡大局面で売り，崩壊によってベンチマークが下落するのを待つのである。ただし，完全な逆張り戦略（即時売却）もやはり最適とは限らない。売却が早すぎると，上昇相場から長期間“置いてきぼり”になり解雇される可能性が高まるからである。すなわち，マネジャーは解雇の脅威によりある程度はバブルに乗るが，ベンチマークを上回ることを目指していずれは売りに転じるのである。

モデルの均衡分析から，二つの実証的含意が得られる。

1. 報酬が運用成績に強く連動するほど，マネジャーはバブル相場から早く手を引く（逆張り戦略）。
2. 解雇の脅威に強く晒される（例えば若者）ほど，マネジャーはバブルに長く乗る（トレンド追従戦略）。

含意1は，Dass, Massa and Patgiri（2008）の「報酬体系が運用成績と強く連動しているファンドほど，バブル株への投資比率は低い」という実証結果と整合的である。経済学的直感は次の通りである。報酬の運用成績への連動が強まると，バブル崩壊前に成功裏に売り抜けたときの報酬は高まるものの，売らずに相場に追従したときの報酬は変わらない。よって，上昇相場に逆らって早く売ることの魅力が相対的に高まり，逆張り戦略につながる。

含意2は，Chevalier and Ellison（1999）による「若いファンドマネジャーほど解雇の脅威に晒されている」という観察結果と，Greenwood and Nagel（2009）の「若いファンドマネジャーほどバブル株を購入する傾向がある」という実証結果の組み合わせと整合的である。直感的には，若いマネジャーは，ベンチマークを下回り解雇されることへの恐怖から，上昇相場から離脱することを

嫌うのである。

本研究で得られた新たな知見は，「ファンドマネジャーのインセンティブ制度が資産バブルに与える影響は，一口に言い切ることはできず，制度を構成する個別の要素によって大きく変わりうる」ということである。つまり，良い運用成績をボーナスによって報いること（アメ）と，悪い運用成績を解雇によって罰すること（ムチ）は，どちらも良い投資パフォーマンスを促すよう意図されているという意味で同じ方向性をもったインセンティブ制度を構成しているように見えるが，バブルへの影響は真逆である。前者はマネジャーに価格の歪みを早期に修正させバブルの収縮を助けるが，後者は彼らに相場の流れに乗ることを選択させバブルの拡大を助長する可能性がある。

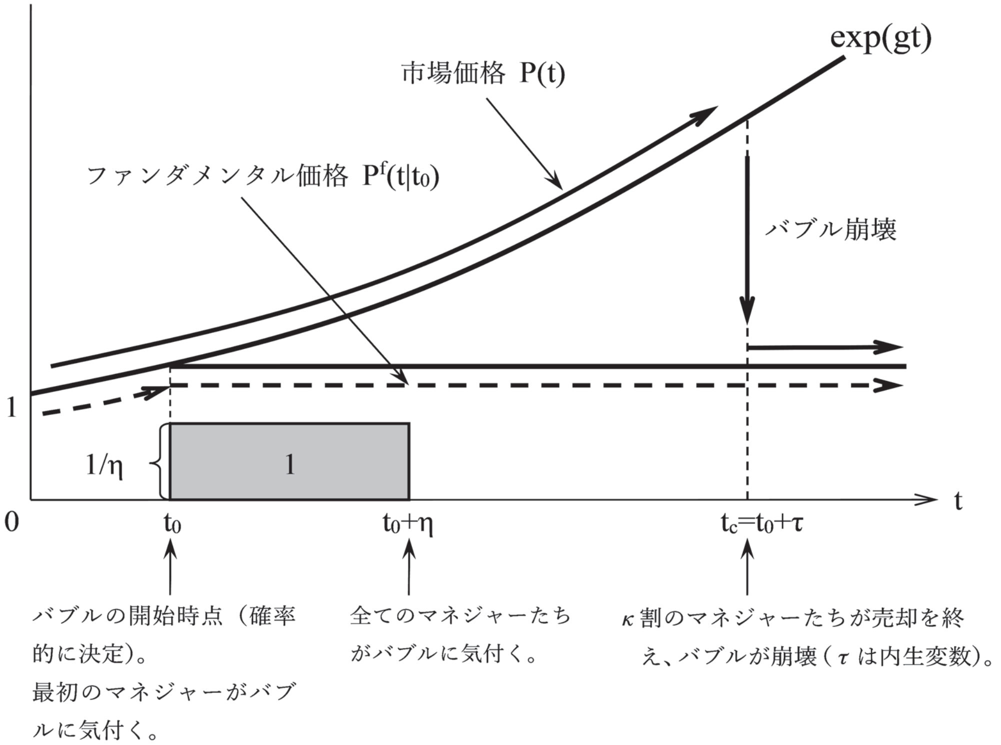
本稿は，機関投資家と資産バブルとの関係を論じたいくつかの先行研究に関連している。Sato (2016) もファンドマネジャーとバブルとの関係を理論的に分析している。Sato (2016) はマネジャー間の相対ランキング評価に焦点を当てているのに対し，本稿では各マネジャーと市場ベンチマークとの相対評価に着目し，更にインセンティブ構造のアメとムチの両側面の効果を分析している点が異なっている。他の先行研究は，機関投資家を取り巻くエージェンシー問題との関連においてバブルを論じている。例えば，Allen and Gorton (1993) は，情報劣位にある顧客を搾取する目的でファンドマネジャーが故意にバブルを発生させる可能性を提示している。Allen and Gale (2000) は，銀行から資金を借り入れた投資家によるリスク・シフティングの結果としてバブルが起こりうると論じる。Hong, Scheinkman, and Xiong (2008) のモデルでは，ファンドマネジャーが，自らが新しいテクノロジーを理解していることを見せつける目的でテクノロジー株に過剰投資し，バブルが引き起こされるメカニズムが示されている。これら三つの研究とは異なり，本稿では市場ベンチマークに関連付けられたインセンティブ構造とバブルとの関係を論じる。また，本稿ではバブルの発生ではなくその持続のメカニズムに注目している点も異なっている。

本稿の構成は以下の通りである。第二章で基本モデルを詳述し，第三章でモデルの均衡を分析し，第四章で総括する。

2　モデル

モデルの概観は以下の通りである。連続時間・無限期間の経済で，一種類の金融資産が取引される市場を考える。各時点を $t \in [0, \infty)$ で表す。ある時点に外生的にバブルが始まる。つまり，資産の価格がそのファンダメンタルを超えて成長し始める。合理的なファンドマネジャーが，バブルの存在に順々に（sequentially）かつ私的に（privately）気付いていく。各マネジャーは，売り抜ける前にどれだけの期間そのバブルに乗るかを決定する。バブルは，ある一定割合のマネジャーたちが売り抜けた瞬間に崩壊する。各時点において，各マネジャーは自身の投資リターンと市場ベンチマークとの比較に基づいた報酬を受け取る。ただし，ベンチマークを一定期間続けて下回ったマネジャーは解雇され，それ以降の報酬を失う。次節から，モデル設定を詳述する。

図１　資産価格の経路（Abreu and Brunnermeier 2003）



2. 1　資産価格の経路

時間を通じた資産価格の動きは，AB と同様と仮定する（図 1）。市場価格 $P(t)$ はすべての t で公に観察可能であり，その初期値 $P(0)$ を 1 に基準化する。無リスク利子率は 0 とする。$t = 0$ 以降，$P(t)$ は成長率 $g > 0$ で上昇していく。$t = 0$ から確率的なある時点 t_0 までの間，資産のファンダメンタル価格 $P^f(t|t_0)$ は市場価格 $P(t)$ に一致している。t_0 以降，$P^f(t|t_0)$ の成長率は 0 に下落する。しかし，$P(t)$ は t_0 以降も成長率 g のまま上昇し続けると仮定する。市場価格とファンダメンタル価格の差 $P(t) - P^f(t|t_0)$ が，“バブル”である。バブルの発生時点 t_0 は観察不可能で，累積分布関数 $\Phi(t_0) = 1 - e^{-\lambda t_0}$ に従って $[0, \infty)$ 上に分布している（$\lambda > 0$ は定数）。バブルは，マネジャーたちからの累積的な売却圧力が十分に大きくなったときに崩壊する。具体的には，$\kappa \in (0, 1)$ の割合のマネジャーたちが売却を終えた瞬間に崩壊すると仮定する。本モデルでは，バブルの「発生」については外生的に仮定し，それが何故「持続」するかに焦点を当てることに注意されたい。バブルの内生的な持続期間を τ としよう。つまり，バブルは時点 $t_c \equiv t_0 + \tau$ に崩壊する。バブルの崩壊後，市場価格は即座にファンダメンタル価格に戻るものとする。すなわち，$t \geq t_c$ に対して $P(t) = P^f(t|t_0)$ である。t_0 が観察不可能なため，マネジャーたちはバブルが崩壊するまで $P^f(t|t_0)$ の値を知ることができないことに注意されたい。

2. 2 ファンドマネジャー

市場には,無限期間生きるリスク中立的なファンドマネジャーたちが測度1の連続体で存在する。各マネジャーは，$t=0$ には顧客預かり資産の1円を全てこの市場に投資している。単純化のため，全てのマネジャーは個人資産を持たず，借り入れも空売りもできず，一度資産を売却したらそれを買い戻すこともできないと仮定する。AB と同様に，各時点 $t\in[t_0, t_0+\eta]$（$\eta>0$）において，密度 $1/\eta$ のマネジャーたちが私的に $P(t)>P^f(t|t_0)$ という事実に気付いていく。各マネジャーの取引は他のマネジャーたちには観察できない。ここで重要なことは，マネジャーたちが順々かつ私的にバブルに気付きかつ自分以外の取引が観察不可能という仮定から，各マネジャーはバブルに気付いた時に自分が他のマネジャーたちよりも早く気付いたのか遅く気付いたのかが分からないということである [2)]。以下では,$t=t_i$ にバブルに気付いたマネジャーを“マネジャー i”と呼ぶ。マネジャー i は，バブルに気付いてから $x_i\in[0,\infty)$ 期間それに乗り続け，時点 t_i+x_i に売却する。x_i はマネジャー i の選択変数であり，彼の資産の「保有期間」と呼ぶことにする。

2. 3 マネジャーの利得

各時点 $t\in[0,\infty)$ に各マネジャーは，解雇されていない限り，時点0から t までの彼自身の投資リターンと市場全体のリターンとの比較に基づいて報酬を受け取る。各マネジャーのパフォーマンス評価の基準となる市場ベンチマーク $R_m(t)$ は，時点0から t まで市場で資産を保有し続けたときに得られるリターンと定義する。すなわち，$R_m(t)\equiv P(t)/P(0)$ であり，具体的に書き下せば下式になる。

$$R_m(t)=\begin{cases} e^{gt} & \text{for } t\in[0,t_c), \\ e^{gt_0} & \text{for } t\in[t_c,\infty). \end{cases} \tag{2.1}$$

各マネジャー i の投資リターン $Ri(t)$ は，時点0から t までに彼の投資から得られるリターンと定義する。$Ri(t)$ は，マネジャー i がバブル崩壊より前に売却したのか後に売却したのかによって，以下のように異なる。

$$\begin{aligned} &\text{If } t_c\in(t_i,t_i+x_i], \quad R_i(t)=\begin{cases} e^{gt} & \text{for } t\in[0,t_c), \\ e^{gt_0} & \text{for } t\in[t_c,\infty). \end{cases} \\ &\text{If } t_c\in(t_i+x_i,\infty), \quad R_i(t)=\begin{cases} e^{gt} & \text{for } t\in[0,t_i+x_i), \\ e^{g(t_i+x_i)} & \text{for } t\in[t_i+x_i,\infty). \end{cases} \end{aligned} \tag{2.2}$$

(2.2) 式の一行目は，マネジャー i が売却する前にバブルが崩壊するケース（$t_c\in(t_i, t_i+x_i]$）における $R_i(t)$ である。このケースでは，生成から崩壊まで全ての期間でバブルに乗り続けることになるため,マネジャーが出すリターン $R_i(t)$ はすべての $t\in[0,\infty)$ に対して市場ベンチマーク $R_m(t)$

2) これらは AB の重要な仮定であり，均衡でバブルが正の期間持続するために必要なものである。各マネジャーは，自分がバブルに気付いたとしても，他の多くのマネジャーたちがまだ気付いていない可能性もあることから，即座に売却はせずにしばらくバブルに乗り続けることを選択することもあり得るのである。

と一致している。他方，（2.2）式の二行目は，マネジャー i が売却した後にバブルが崩壊するケース $(t_c \in (t_i + x_i, \infty))$ である。このケースにおける $R_i(t)$ は，彼が時点 $t_i + x_i$ に売却するまではベンチマーク $R_m(t)$ に一致するが，それ以降は，売却によって得た $e^{g(t_i+x_i)}$ 円を収益率 0 の無リスク資産で運用したものになる。

マネジャー i のパフォーマンス $Y_i(t)$ は，彼自身の投資リターンを市場ベンチマークと比較することで測るものとし，$Y_i(t) \equiv R_i(t)/R_m(t)$ と定義する。（2.1）式と（2.2）式から，$Y_i(t)$ は下式のように書ける。

$$\text{If } t_c \in (t_i, t_i + x_i], \quad Y_i(t) = 1 \ \text{ for } t \in [0, \infty).$$
$$\text{If } t_c \in (t_i + x_i, \infty), \quad Y_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \in [0, t_i + x_i), \\ e^{-g(t-(t_i+x_i))} & \text{for } t \in [t_i + x_i, t_c), \\ e^{g((t_i+x_i)-t_0)} & \text{for } t \in [t_c, \infty). \end{cases} \tag{2.3}$$

（2.3）式の一行目の意味は，仮にマネジャーがバブル崩壊後に売却した場合（$t_c \in (t_i, t_i + x_i]$）には，彼のリターン $R_i(t)$ は市場ベンチマーク $R_m(t)$ と終始一致するため，彼のパフォーマンスはすべての t に対して $Y_i(t) = 1$ ということである。(2.3)式の二行目は, 仮にバブル崩壊前にマネジャーが売却した場合（$t_c \in (t_i + x_i, \infty)$）には，彼のパフォーマンスは三つの段階で変化していくことを意味している。第一段階は，成長するバブルに乗っているとき（$t \in [0, t_i + x_i)$）であり，ここでは彼のリターンはベンチマークと一致しているので $Y_i(t) = 1$ である。第二段階は，マネジャーは既に売却したがバブルがまだ崩壊していないとき（$t \in [t_i + x_i, t_c)$）である。ここでは，マネジャーは上昇相場から“置いてきぼり”になっているため，彼個人のリターンは市場ベンチマークを下回っている（$Y_i(t) < 1$）。彼が時点 $t_i + x_i$ に売却した後にバブルが長く拡大を続けるほど，彼のパフォーマンス $Y_i(t)$ は悪化していく。それが，第二段階の $Y_i(t)$ が，彼が売却してからの経過時間 $t - (t_i + x_i)$ の減少関数になっている理由である。第三段階は，バブルが崩壊した後（$t \in (t_c, \infty)$）である。ここでは，マネジャーのリターンは市場ベンチマークを上回る（$Y_i(t) > 1$）。何故なら，バブル崩壊によって市場価格はファンダメンタル価値 e^{gt_0} まで下落した一方で，マネジャーは時点 $t_i + x_i$ にファンダメンタルを上回るバブル価格 $e^{g(t_i+x_i)}$ で売り抜けていたからである。

マネジャー i の利得は，彼のパフォーマンスに依存した以下の二つの要素で構成される。

1. インセンティブ報酬：マネジャー i は, 解雇されない限り, 各時点 $t \in [0, \infty)$ において報酬 $F_i(t) = Y_i(t)^{\xi}$ 円を受け取る。$\xi > 0$ は外生的な定数である。
2. 解雇：仮にマネジャー i のリターンが市場ベンチマークを $\phi > 0$ 期間続けて下回った場合（$Y_i(t) < 1$），彼は解雇される。一度解雇されたら，その後の報酬は受け取れなくなる（$F_i(t) = 0$）。

以下で行う比較静学分析においてとくに重要なパラメータは，ξ と ϕ である。ξ が大きいほど，マネジャーの報酬はより強くパフォーマンスに連動することになる。ϕ が小さいほど，マネジャーはより容易に解雇されることになる。本稿の主たる目的は，マネジャーたちの資産保有期間の選択とその結果としてのバブルの持続期間が，どのように ξ と ϕ から影響を受けるかを理解することである。

均衡において実際に解雇されるマネジャーが存在することを保証するために，以下のようにϕが十分に小さいことを仮定する。

仮定 1. $\phi < \eta\kappa$.

仮定 1 が成立しない場合，マネジャーたちは売却が早すぎることによって解雇されることがないため，全員バブルに乗らずに即時売却する均衡（$x_i = 0\ \forall_i$）しかあり得なくなる。

時点 t_i におけるマネジャー i の問題は，彼がその後将来にわたり獲得する報酬額の現在価値の期待値を最大化するように，資産の保有期間 $x_i \in [0, \infty)$ を選択することである。すなわち，全てのマネジャーたちに共通な時間割引率を $\rho > 0$ とおけば，マネジャー i の時点 t_i での目的関数 V_i は下式である。

$$V_i = \mathrm{E}\left[\int_{t_i}^{\infty} e^{-\rho(t-t_i)} F_i(t)\mathrm{d}t\right]. \tag{2.4}$$

3 均衡分析

本節では，全てのマネジャーたちが同じ保有期間 x^* を選択する（$\forall_i\ x_i = x^*$）ような，対称的な完全ベイジアン均衡（Perfect Bayesian Equilibrium）を探し，分析する。

3. 1 報酬の時間経路：三つのシナリオ

はじめに，マネジャー i の報酬 F_i（t）を，彼の選択変数 x_i の関数として書き直す。明らかに，$F_i(t)$ は x_i に依存するだけではなく，内生的に決まる確率変数であるバブルの崩壊時点 t_c の実現値にも依存する。そのため，マネジャー i の売却時点 $t_i + x_i$ とバブル崩壊時点 t_c との相対的な関係に依存して，$F_i(t)$の時間を通じた経路について，以下の三つのシナリオが考えられる。

シナリオ 1：

$$t_c \in (t_i, t_i + x_i] \text{ and } F_i(t) = 1 \text{ for } t \in [0, \infty). \tag{3.1}$$

シナリオ 2：

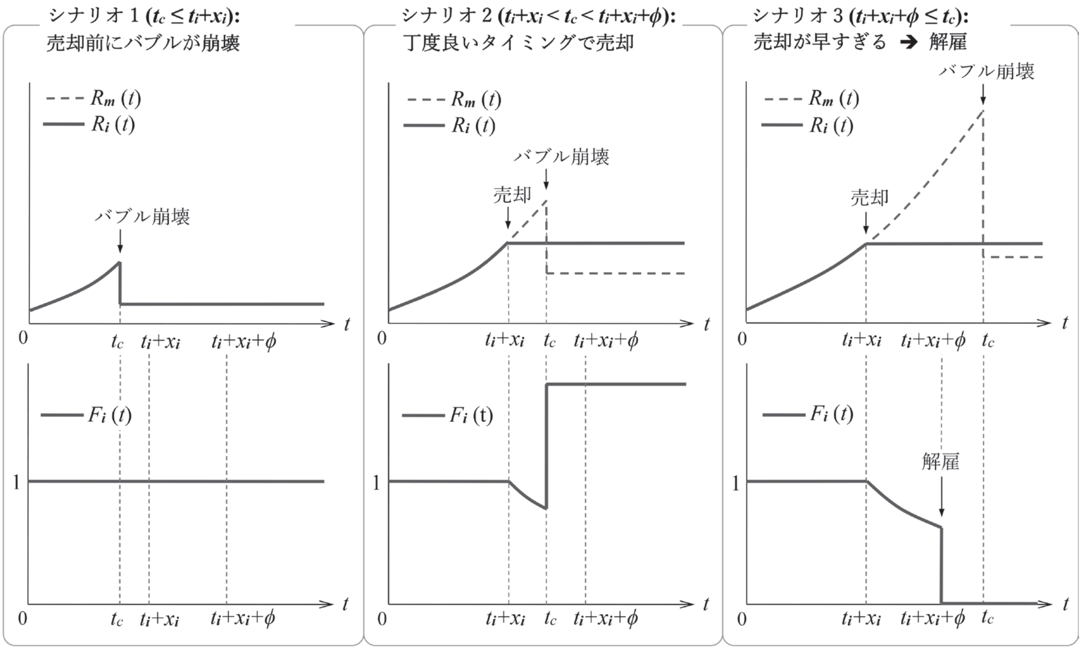
$$t_c \in (t_i + x_i, t_i + x_i + \phi) \text{ and } F_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \in [0, t_i + x_i), \\ e^{-\xi g(t-(t_i+x_i))} & \text{for } t \in [t_i + x_i, t_c), \\ e^{\xi g((t_i+x_i)-t_0)} & \text{for } t \in [t_c, \infty). \end{cases} \tag{3.2}$$

シナリオ 3：

$$t_c \in [t_i + x_i + \phi, \infty) \text{ and } F_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \in [0, t_i + x_i), \\ e^{-\xi g(t-(t_i+x_i))} & \text{for } t \in [t_i + x_i, t_i + x_i + \phi), \\ 0 & \text{for } t \in [t_i + x_i + \phi, \infty). \end{cases} \tag{3.3}$$

各マネジャーの最適化問題は，x_i を選ぶことによってこれら三つのシナリオ間の相対的な起こりやすさをコントロールするものと解釈できる。図 2 は，各シナリオについて，市場ベンチマーク

図２　市場ベンチマーク $R_m(t)$、マネジャー i のリターン $R_i(t)$、マネジャー i の報酬 $F_i(t)$



$R_m(t)$（点線）とマネジャー i のリターン $R_i(t)$（実線）の時間経路を上側に，マネジャー i の報酬 $F_i(t)$の時間経路を下側に示している。シナリオ１（左パネル）では，マネジャーが売却する前にバブルが崩壊する($t_c \le t_i + x_i$)。ここでは，マネジャーのリターンはベンチマークと終始一致するため，彼は結果的に市場のトレンドを追従する形になっている。彼のパフォーマンスは終始 $Y_i(t) = 1$ であり，したがって報酬はすべての t に対して $F_i(t) = 1$ である。シナリオ２（中パネル）では，マネジャーはバブルが崩壊する直前に，市場価格のピーク付近で手を引いている。つまり彼は，遅すぎも早すぎもしない“丁度良い”タイミングでバブル資産を売却することに成功しているのである($t_i + x_i < t_c < t_i + x_i + \phi$)。売却後，まだバブルが膨らみ続けているしばらくの間は，彼は市場ベンチマークを下回るため，$F_i(t)$は１を割って減少していく。しかし，ひとたびバブルが崩壊すれば，彼のリターンは市場ベンチマークを上回るため，その後は $F_i(t) > 1$ を得ることになる。シナリオ３（右パネル）では，マネジャーが売却してから ϕ 期間が経過してもなおバブルが崩壊せず膨らみ続けている（$t_i + x_i + \phi \le t_c$）という意味で，彼の売却は早すぎる。売却後，彼は ϕ 期間ベンチマークを下回るため解雇され，その後は報酬を受け取れなくなる（$F_i(t) = 0$)。

シナリオ１は，(i）報酬が終始一定であること，(ii）各マネジャーはこのシナリオを確実に選ぶことができる（売却せずに $x_i = \infty$とすれば良い）ということから，三つのシナリオの中で最も“安全”といえる。このシナリオの欠点は，市場ベンチマークを上回ることがないため，非常に高い報酬を得ることはできないということである。バブル崩壊後に高い報酬を獲得するためには，マネジャーはマーケットタイミングのギャンブルをする必要がある。すなわち，比較的小さい x_i を選ぶことによって，最悪の結果であるシナリオ３が実現する可能性も高まるというダウンサイドも考

慮に入れつつ，シナリオ 2 の達成を目指す必要があるのである。

3. 2　最適化問題

三つのシナリオそれぞれの起こりやすさを具体的に計算するために，マネジャー i の視点から見た，バブル崩壊時点 t_c の確率分布を求めよう。マネジャー i は時点 t_i にバブルに気付く。それにより，彼はバブルが少なくとも時点 $t_i-\eta$ よりも後に始まったことを知る。よって，彼の視点から見ると，バブルの開始時点 t_0 の事後確率分布は下式のような $[t_i-\eta, t_i]$ 上の切断分布（truncated distribution）である。

$$\Phi(t_0|t_i)=\int_{t_i-\eta}^{t_0}\frac{\mathrm{d}\Phi(v)}{\Phi(t_i)-\Phi(t_i-\eta)}=\frac{e^{\lambda\eta}-e^{\lambda(t_i-t_0)}}{e^{\lambda\eta}-1}. \tag{3.4}$$

マネジャー i がバブルの持続期間が τ だと信じていることを所与とすると，彼の視点から見たときの，バブルが時点 t_c までに崩壊している主観的確率は次式である。

$$\Pi(t_c|t_i)=\int_{t_i-\eta}^{t_c-\tau}\mathrm{d}\Phi(t_0|t_i)=\begin{cases}\dfrac{e^{\lambda\eta}-e^{\lambda(t_i-(t_c-\tau))}}{e^{\lambda\eta}-1} & \text{for} \quad t_c\in(t_i,t_i+\tau),\\ 1 & \text{for} \quad t_c\in[t_i+\tau,\infty).\end{cases} \tag{3.5}$$

マネジャーたちの κ 割合が時点 $t_0+\eta\kappa$ までにバブルに気付き，対称均衡では時点 $t_0+\eta\kappa+x^*$ にバブルが崩壊するため，バブルの持続期間は $\tau=\eta\kappa+x^*$ である。よって，(3.5) 式は以下のように書き直せる。

$$\Pi(t_c|t_i)=\begin{cases}\dfrac{e^{\lambda\eta}-e^{\lambda((t_i+\eta\kappa+x^*)-t_c)}}{e^{\lambda\eta}-1} & \text{for} \quad t_c\in(t_i,t_i+\eta\kappa+x^*),\\ 1 & \text{for} \quad t_c\in[t_i+\eta\kappa+x^*,\infty).\end{cases} \tag{3.6}$$

ここで，(3.1)，(3.2)，(3.3)，(3.6) 式を使うと，マネジャー i の目的関数 V_i を x_i の関数として次のように書ける。

$$\begin{aligned}V_i(x_i)=&\int_{t_i}^{t_i+x_i}\left(\int_{t_i}^{\infty}e^{-\rho(v-t_i)}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}\Pi(t_c|t_i)\\&+\int_{t_i+x_i}^{t_i+x_i+\phi}\left\{\begin{array}{c}\displaystyle\int_{t_i}^{t_i+x_i}e^{-\rho(v-t_i)}\mathrm{d}v\\ \displaystyle+\int_{t_i+x_i}^{t_c}e^{-\rho(v-t_i)-\xi g(v-(t_i+x_i))}\mathrm{d}v\\ \displaystyle+\int_{t_c}^{\infty}e^{-\rho(v-t_i)+\xi g((t_i+x_i)-(t_c-\tau))}\mathrm{d}v\end{array}\right\}\mathrm{d}\Pi(t_c|t_i)\\&+\int_{t_i+x_i+\phi}^{\infty}\left\{\begin{array}{c}\displaystyle\int_{t_i}^{t_i+x_i}e^{-\rho(v-t_i)}\mathrm{d}v\\ \displaystyle+\int_{t_i+x_i}^{t_i+x_i+\phi}e^{-\rho(v-t_i)-\xi g(v-(t_i+x_i))}\mathrm{d}v\end{array}\right\}\mathrm{d}\Pi(t_c|t_i).\end{aligned} \tag{3.7}$$

(3.7) 式の一行目はシナリオ 1, 二行目はシナリオ 2, 三行目はシナリオ 3 に対応している。マネジャー i 一人では $\Pi(t_c|t_i)$ の関数形を変化させることはできないことに注意されたい。事実，(3.6) 式か

ら，$\Pi(t_c|t_i)$ は対称均衡における資産の保有期間 x^* には依存するが，マネジャー i 自身が自由に選ぶことのできる x_i には依存していない。これは，各マネジャーは市場全体に比べると小さな存在であり，独力で市場価格に影響を及ぼすことはできないことを反映している。各マネジャーは，バブル崩壊時点の確率分布 $\Pi(t_c|t_i)$ を所与として x_i を選ぶことによって，三つのシナリオの相対的な起こりやすさをコントロールするのである。

3. 3 均衡

マネジャー i は，x^* を所与として，(3.7) 式を最大化するように $x_i \in [0, \infty)$ を選ぶ。最適化の条件は，$\mathrm{d}V_i(x_i)=\mathrm{d}x_i \leq 0$ で，$x_i > 0$ のときに等号で成立するものである。この条件は，いくつかの計算を経た後に，以下のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned}
&\underbrace{-\left(\frac{e^{\xi g\tau}}{\rho}-\frac{1}{\rho}\right)\frac{\mathrm{d}\Pi(t_i+x_i|t_i)}{\mathrm{d}x_i}}_{\text{(i)}}+\underbrace{\frac{e^{\xi g\tau-(\rho+\xi g)\phi}}{\rho}\frac{\mathrm{d}\Pi(t_i+x_i+\phi|t_i)}{\mathrm{d}x_i}}_{\text{(ii)}}\\
&+\underbrace{\int_{t_i+x_i}^{t_i+x_i+\phi}\left(1+\left(\left(1+\frac{\xi g}{\rho}\right)e^{\xi g\tau}-1\right)\frac{\xi g e^{-(\rho+\xi g)(t_c-(t_i+x_i))}}{\rho+\xi g}\right)\mathrm{d}\Pi(t_c|t_i)}_{\text{(iii)}} \qquad (3.8)\\
&+\underbrace{\int_{t_i+x_i+\phi}^{\infty}\left(\frac{\xi g+\rho e^{-(\rho+\xi g)\phi}}{\rho+\xi g}\right)\mathrm{d}\Pi(t_c|t_i)}_{\text{(iv)}}\leq 0, \quad \text{with equality if } x_i>0.
\end{aligned}$$

資産の保有期間 x_i を長くするということは，それをしなければバブルが崩壊するほんの一瞬前に成功裏に売り抜けられたはずのマネジャーが崩壊後に売却することになるということである。言い換えれば，そのようなマネジャーは x_i を大きくすることによってシナリオ 2 からシナリオ 1 にスイッチするということである。このスイッチによって失われる報酬額が，(3.8) 式の一項目の (i) で示された部分に対応している。$e^{\xi g\tau}/\rho$は，このマネジャーがシナリオ 2 にいれば獲得したであろう将来にわたる報酬額の割引現在価値であり，$1/\rho$はシナリオ 1 にスイッチした場合のそれである。このようなスイッチの起こりやすさ (likelihood) を，$\mathrm{d}\,\Pi(t_i + x_i|t_i)/\mathrm{d}x_i$ という項が表している。また，x_i を大きくすると，それをしなければバブルが崩壊するほんの一瞬前に解雇されていたはずのマネジャー (シナリオ 3) が，自らが売却してから ϕ 期間経過する直前にバブルが崩壊して助かる (シナリオ 2) というスイッチも起こりうる。このようなスイッチは，(3.8) 式内の (ii) の中の $e^{\xi g\tau-(\rho+\xi g)\phi}/\rho$という項で表される報酬額の増加をマネジャーにもたらす。このスイッチの起こりやすさは，$\mathrm{d}\,\Pi(t_i + x_i + \phi|t_i)/\mathrm{d}x_i$ という項で表される。更に，x_i の上昇は，シナリオ 2 とシナリオ 3 における報酬額を増加させる。前者は (3.8) 式内の (iii) で，後者は (iv) によって捉えられている。

対称均衡を探すにあたり，マネジャー i の最適化条件 (3.8) 式において $x_i = x^*$ とおく。すなわち，すべての i について $V_i'(x^*) \leq 0$ で，$x^* > 0$ ならば等号成立ということである。これを x^* について解くことにより，以下の命題を得る。

命題 3．1． 対称的な完全ベイジアン均衡が存在し，以下が成立する。

1. すべてのマネジャーの資産の保有期間は $x^* = \max\{0, \hat{x}^*\}$ である。ここで，$\hat{x}^*$ は以下の定数である。

$$\hat{x}^* = \frac{1}{\xi g}\ln\left(\frac{\Theta(\lambda+\rho+\xi g)}{(\lambda+\rho)\left(1-e^{-(\lambda+\rho+\xi g)\phi}\right)}\right) - \eta\kappa$$

with (3.9)

$$\Theta \equiv 1 + \frac{\rho}{\rho+\xi g}\left(\xi g\left(\frac{1-e^{-\lambda\eta\kappa}}{\lambda} - \frac{1-e^{-(\lambda+\rho+\xi g)\phi}}{\lambda+\rho+\xi g}\right) + \rho e^{-(\lambda+\rho+\xi g)\phi}\left(\frac{1-e^{-\lambda(\eta\kappa-\phi)}}{\lambda}\right)\right).$$

2. バブルの持続期間は，次式である。

$$\tau = x^* + \eta\kappa. \tag{3.10}$$

命題 3.1 は，モデルの対称均衡を閉形式（closed-form）の解で表している。この均衡では，すべてのマネジャーは自分がバブルの存在に気付いてから資産を $x^* = \max\{0, \hat{x}^*\}$ 期間保有してから売却する。時点 $t_0 + x^*$ から先，各時点において $1/\eta$ のマネジャーたちが売却していき，時点 $t_0 + x^* + \eta\kappa$ でバブルが崩壊する。まず, 時点 $t \in [t_0, t_0 + \eta\kappa - \phi)$ にバブルに気付いたマネジャーたちは，シナリオ 3 を経験する。つまり，彼らはバブルから手を引くのが早すぎ，市場ベンチマークを ϕ 期間連続で下回ったことにより解雇される。次に，時点 $t \in [t_0 + \eta\kappa - \phi, t_0 + \eta\kappa)$ にバブルに気付いたマネジャーたちはシナリオ 2 を達成する。すなわち，売却から ϕ 期間以内にバブルが崩壊したことにより，彼らはその後高い報酬を獲得するのである。最後に，時点 $t \in [t_0 + \eta\kappa, t_0 + \eta]$ にバブルに気付いたマネジャーたちはシナリオ 1 である。彼らは，生成から崩壊まで終始バブルに乗り続けるため，個々のパフォーマンスが市場ベンチマークと完全に一致することになる。

マネジャーたちがしばらくの間バブルに乗り（$x^* > 0$），しかし永久に乗るわけではない（$x^* < \infty$）という結果の直感的な理由は以下の通りである。他のマネジャーたちの行動とは無関係に，各マネジャーは資産を売却しないという選択（$x^* = \infty$）をとることでシナリオ 1 は確実に実現することができる。しかし, それではシナリオ 2 で高い報酬を得る可能性を完全に放棄することになるため，永久に売却しないということは最適な選択にはならない。しかし反対に，非常に小さい x_i を選ぶことは，最悪の結果であるシナリオ 3 に陥る可能性を高めるため，やはり最適な選択にはならない。そのため，市場ベンチマークを上回るためにある程度早い段階で，ただし早すぎて解雇されない程度にはバブルに乗った後に，売却するのが各マネジャーにとって最適になるのである。

以下では，マネジャーたちが将来を割り引かない極限 $\rho \to 0$ のケースに絞って分析する。その第一の理由は，下の命題 3.2 に示すように，解が非常にシンプルな形で得られるため，比較静学分析が明確な形で行えることである。第二の理由は，$\rho \to 0$ の均衡と通常の ρ の均衡を比べても定性的に大きな差がないことである。第三の理由は，$\rho \to 0$ は，無リスク利子率がゼロであるというモデルの元々の仮定と整合的だからである。元々のモデルで $\rho = 0$ ではなく $\rho > 0$ を仮定していた理由は，マネジャーの目的関数 V_i を定義できる形にするためである。仮に $\rho = 0$ とすると，V_i は無

限に“爆発”して定義することができない。

命題 3. 2. $\rho \to 0$ の対称均衡では，マネジャーの資産の保有期間は $x^{**} = \max\{0, \hat{x}^{**}\}$ である。ここで，$\hat{x}^{**}$ は下式の定数である。

$$\hat{x}^{**} = \lim_{\rho \to 0} \hat{x}^{*} = \frac{1}{\xi g} \ln \left(\frac{\lambda + \xi g}{\lambda \left(1 - e^{-(\lambda + \xi g)\phi}\right)} \right) - \eta\kappa. \tag{3.11}$$

3. 4 実証的含意

命題 3. 3. $\mathrm{d}\hat{x}^{**}/\mathrm{d}\,\xi < 0$ である。すなわち，マネジャーの報酬が投資パフォーマンスに強く連動するほど，彼らは早くバブル資産を売却する。

命題 3.3 は，報酬のパフォーマンスへの連動が強いほど，マネジャーは市場の上昇局面から敢えて早く手を引くという，いわば“逆張り戦略”をとると解釈することもできる。この結果は，Dass, Massa and Patgiri（2008）の，「報酬体系が運用成績と強く連動しているファンドほど，バブル株への投資比率は低い」という実証結果と整合的である。命題 3.3 の経済学的直感は以下の通りである。シナリオ 1 をローリスク・ローリターンの“安全な”投資機会と考え，シナリオ 2 と 3 の間のギャンブルをハイリスク・ハイリターンの“危険な”投資機会と見做してみよう。大雑把に言えば，各マネジャーの x_i の選択は，これら二つの投資機会の間の選択のように考えることができる。x_i を上昇させると，シナリオ 2 でのマネジャーの報酬は上昇する一方でシナリオ 1 でのそれは変化しない。そのため，シナリオ 2 と 3 の間でギャンブルすることが，シナリオ 1 を確実に実現させることに比べて相対的により魅力的になる。これにより，各マネジャーは，シナリオ 1 が起こりにくくなるように x_i を低下させるのである。

極限 $\xi \to 0$ をとった特殊ケースにおいては，マネジャーたちは解雇されない限りは投資パフォーマンスに依存しない固定給を受け取り続けることができる。そのようないわば“サラリーマン・ファンドマネジャー”の世界では，解雇されないようにするということがマネジャーにとっての唯一の目的になるため，彼らの最適な行動は，市場のトレンドに乗って永久に資産を売却しないということになる（$\lim_{\xi \to 0} x^{**} = \infty$）。

命題 3. 4. $\mathrm{d}\hat{x}^{**}/\mathrm{d}\,\phi < 0$ である。すなわち，マネジャーたちが解雇されやすいほど，彼らはバブルに長く乗る。

命題 3. 4 は，Chevalier and Ellison（1999）による「若いファンドマネジャーほど解雇の脅威に晒されている」という実証結果と，Greenwood and Nagel（2009）の「若いファンドマネジャーほどバブル株を購入する傾向がある」という実証結果の組み合わせと整合的である。Chevalier and Ellison（1999）の結果に従えば，ϕ が小さい場合はマネジャーたちが“若い”ケースと捉えることができる。そのため，命題 3.4 は，解雇の脅威に強く晒される若いマネジャーほど，いわば“トレンド追従戦略”をとってバブルに乗ると解釈することができる。経済学的直感は次の通りである。

ϕ の値は各シナリオの報酬額には影響しないが，ϕ が低下すると，所与の x_i に対してシナリオ 3 がより実現しやすくなる。そのため，シナリオ 1 を確実に実現させることに比べて，シナリオ 2 と 3 の間でギャンブルすることの魅力が相対的に低くなり，各マネジャーは x_i を上昇させてシナリオ 1 を実現させやすくするのである。つまり若いマネジャーたちは，解雇されることを恐れて，市場の上昇トレンドから離脱することを嫌うのである。極限 $\phi \to 0$ をとった特殊ケースは，市場ベンチマークを一瞬でも下回ったら解雇されるという極端なものだが，この場合は市場を下回ることがないようにバブルに永久に乗ることがマネジャーたちにとって合理的になるのである（$\lim_{\phi \to 0} x^{**} = \infty$）。

命題 3. 3 と命題 3. 4 から得られる新たな知見は，「ファンドマネジャーのインセンティブ制度が資産バブルに与える影響は，一口に言い切ることはできず，制度を構成する個別の要素によって大きく変わりうる」ということである。つまり，良い運用成績をボーナスによって報いること（大きい ξ；アメ）と，悪い運用成績を解雇によって罰すること（小さい ϕ；ムチ）は，どちらもより良い投資パフォーマンスを促すよう意図されているという意味で同じ方向性をもつインセンティブ制度を構成しているように見えるが，資産バブルへの影響は真逆である。前者はマネジャーに価格の歪みを早期に修正させバブルの収縮を助ける（命題 3.3）が，後者は彼らに相場の流れに乗ることを選択させバブルの拡大を助長する可能性がある（命題 3.4）。

4　おわりに

本稿では，ファンドマネジャーの報酬体系や解雇ルールといったインセンティブ構造が，彼らの取引戦略を変化させることを通じて，資産価格バブルにどのような影響を与えるかを理論的に考察した。具体的には，Abreu and Brunnermeier（2003）のモデルを拡張し，市場ベンチマークとの比較において良い投資結果を出し続ける限り報酬を受け取れるが，悪い結果を出し続けると解雇されるという構造を明示的に組み入れたモデルを分析した。マネジャーたちは市場の上昇相場から“置いてきぼり”にされて解雇されるのを恐れてしばらくの間バブルに乗るが，市場ベンチマークを上回るためにはバブル崩壊の前に売り抜ける必要があるため，永久にバブルに乗るわけではない。そのため，均衡では，彼らは正かつ有限の期間バブルに乗り，この行動がバブルの持続期間を内生的に決定する。本モデルから，以下の二つの実証的含意が得られる。(1) Dass, Massaand Patgiri（2008）の結果と整合的に，報酬が投資パフォーマンスと強く連動するほどマネジャーはバブル資産から早く手を引く（つまり，逆張り戦略をとる）。(2) Chevalier and Ellison（1999）と Greenwood andNagel（2009）の結果と整合的に，解雇の脅威に強く晒されるほど（例えば若者ほど）バブルに長く乗る（つまり，トレンド追従戦略をとる）。これらの結果が示唆することは，ファンドマネジャーのインセンティブ制度が資産バブルに与える影響は一口に言い切ることはできず，制度を構成する個別の要素によって大きく変わりうるということである。良い運用成績をボーナスによって報いること（アメ）と，悪い運用成績を解雇によって罰すること（ムチ）は，どちらもより良い投資パフォーマンスを促すよう意図されているという意味で同じ方向性をもつインセンティブ制度を構成するよ

うに見えるが，資産バブルへの影響は異なる。前者はマネジャーに価格の歪みを早期に修正させバブルの収縮を助けるが，後者は彼らに相場の流れに乗ることを選択させバブルの拡大を助長する可能性がある。

今後, 本稿に関連した研究を継続していく上で特筆すべきことは, Dass, Massa and Patgiri（2008）はバブル株を保有する「長さ」についての実証分析はしておらず, また Greenwood and Nagel（2009）も資産保有の長さについては分析していないということである。本稿のモデルから得られた含意をデータで検証する際に，バブル資産を保有した「期間」のデータを明示的に取り入れることができれば，ファンドマネジャーのインセンティブ構造と投資行動の関係についてより深く理解することが可能になると考えている。

参考文献

［1］ Abreu, D., and M. Brunnermeier, 2003, "Bubbles and Crashes," *Econometrica*, 71, 173-204.

［2］ Allen, F., and D. Gale, 2000, "Bubbles and Crises," *Economic Journal*, 110, 236-255.

［3］ Allen, F., and G. Gorton, 1993, "Churning Bubbles," *Review of Economic Studies*, 60, 813-836.

［4］ Chevalier, J., and G. Ellison, 1999, "Career Concerns of Mutual Fund Managers," *Quarterly Journal of Economics*, 114, 389-432.

［5］ Dass, N., Massa, M., and Patgiri, R., 2008, "Mutual Funds and Bubbles: The Surprising Role of Contractual Incentives," *Review of Financial Studies*, 21, 51-99.

［6］ Greenwood, R., and S. Nagel, 2008, "Inexperienced Investors and Bubbles," *Journal of Financial Economics*, 93, 239-258.

［7］ Hong, H., Scheinkman, J. and W. Xiong, 2008, "Advisors and Asset Prices: A Model of the Origins of Bubbles," *Journal of Financial Economics*, 89, 268-287.

［8］ Sato, Y., 2016, "Fund Tournaments and Asset Bubbles," *Review of Finance*, 20, 1383-1426.